Revue Baobab: Numéro 8

Premier semestre 2011

La révolution bachelardienne des mathématiques dans l'histoire de l'épistémologie contemporaine

Stevens BROU Gbaley Bernaud
Université de Bouaké

Introduction

L'histoire des sciences, surtout l'histoire des mathématiques et de la physique enseignent que pour avancer, il est nécessaire de rompre avec la physique d'Aristote fondée sur une conception sensible et résolument antimathématique. Cette physique qui se refusait à substituer une abstraction géométrique aux faits de l'expérience et du sens commun déniait la possibilité même d'une physique mathématique en soulignant l'incapacité des mathématiques à expliquer la qualité et à rendre compte du mouvement[1]. Il est dès lors important de changer de philosophie et développer une conception dans un nouveau système qui puisse rendre compte de la souplesse des mathématiques dans la révolution bachelardienne. C'est bien pour cela qu'il fallait commencer par rééduquer les esprits, en les obligeant à penser mathématiquement et à rompre avec l'épistémologie antique, classique et moderne.

Au fond, c'est la pensée mathématique qui est à l'origine de la nouvelle science. Si pour Galilée le monde ne pouvait se comprendre que mathématiquement, il faut noter avec Newton que l'avènement du calcul infinitésimal est la marque d'un nouvel esprit scientifique. Cette pensée newtonienne remit à l'ordre du jour la philosophie platonicienne telle qu'exposée dans *le Timée*. En effet, les platoniciens accordent aux mathématiques une valeur suprême et une position clé dans l'étude de la nature. Telle fut bien la conception d'Einstein qui trouve dans les mathématiques un principe de création. Sans doute la hardiesse des pensées de Platon, de Galilée, de Newton, d'Einstein va jouer un rôle non négligeable dans la révolution bachelardienne des mathématiques[2]. Cette révolution met l'accent sur les mathématiques dans leur rapport avec les disciplines voisines, surtout

[1] Selon la philosophie aristotélicienne on ne pouvait concevoir ni qualité ni mouvement dans les êtres que sont les figures et les nombres

[2] Il y a révolution, lorsqu'un ordre nouveau vient supplanter un ordre ancien. L'épistémologie antique, classique et moderne considéraient les mathématiques comme un simple outil. Or, l'épistémologie contemporaine avec Bachelard considère plutôt les mathématiques comme le fondement de toutes sciences. Plus encore, comme une science qui fait l'unité du réel et de la raison. Elles ne donnent pas de vérités apodictiques, mais des vérités dialectisables. Cette nouvelle fonction des mathématiques est avant tout une rupture avec l'épistémologie antique, classique et moderne des mathématiques.

dans leur effort de dialectisation et de construction. Comment comprendre cette révolution bachelardienne des mathématiques ? Quel en est l'enjeu dans l'histoire de l'épistémologie contemporaine ?

Cette révolution bachelardienne des mathématiques sera défendue dans cette contribution à partir des repères suivants : la beauté des mathématiques dans la structuration de la vérité. Ensuite, pour la philosophie en particulier et la science en général, la mathématique, c'est d'une part la géométrie et d'autre part les nombres. Quel intérêt la pensée bachelardienne accorde-t-elle à la géométrie et au nombre ? Enfin, nous prendrons l'exemple de certaines sciences comme la linguistique pour montrer que les mathématiques constituent le substrat des autres disciplines dans la pensée bachelardienne des mathématiques.

I. La beauté des mathématiques selon la révolution bachelardienne

Les mathématiques ont été sans doute au cours de l'histoire les premières connaissances à atteindre le statut de science. La dénomination de science rigoureuse, certaine et rationnelle que certains philosophes comme Bachelard assignent aux mathématiques souligne un trait particulier de ce type de connaissance. Ce privilège ou cette beauté des mathématiques est surtout lié à la nature de ses objets, de ses définitions, de ses postulats et surtout de son langage démonstratif. Selon les mots de Bachelard, « la mathématique est une pensée, une pensée sûre de son langage »[3]. La démonstration et le langage sont un réquisit indispensable pour le dévoilement de la vérité. Nous voudrions ici inspecter avec Bachelard deux aspects de la révolution mathématique dans lesquels s'exprime la beauté de la science mathématique. Il s'agit de la vérité et du réalisme non pas comme ils sont exprimés dans l'épistémologie antique, classique et moderne des mathématiques mais plutôt dans l'épistémologie contemporaine.

I.1.Le fantasme de la vérité

Si depuis la Grèce antique, les mathématiques ont donné l'exemple d'une parfaite unité, c'est parce que, selon Bachelard, génération après génération, les mathématiciens se sont interrogés sur la nature profonde des mathématiques, sur les lignes directrices et fécondantes et ont su tirer de leur réflexion les éléments unificateurs. Traditionnellement, mathématique, rigueur et vérité sont synonymes. Depuis Euclide et surtout la fin du XVIII^{e} siècle, les mathématiques ont cru détenir la vérité avec l'avènement de la mathématique formelle axiomatique. Chez les grecs le souci de vérité était déjà prédominant. Cette vérité

[3] Bachelard (Gaston), *Activité rationaliste de la physique contemporaine*, Paris, P.U.F, 1951, P.29.

naît à travers des démonstrations et des constructions procédant de la rigueur dans la démarche. Cette rigueur a une histoire. Et pourtant, cette rigueur bien que possédant une histoire n'est pas si solide qu'on pourrait le croire, c'est le sens du titre "fantasme de la vérité". Le fantasme de la vérité est une illusion de la vérité. Dans l'épistémologie antique, classique et moderne des mathématiques, on a pensé que la vérité mathématique était absolue. Or, avec l'avènement de la relativité et des géométries non euclidiennes, on s'est rendu compte que la vérité mathématique est liée à un système donné. À partir du XVIIIe siècle et du XIXe siècle, une grande partie des démonstrations devient inacceptable. C'est de cette épistémologie des mathématiques dont il est question dans l'histoire de l'épistémologie contemporaine.

Des exemples de fautes de rigueur suscitent bien entendu la naissance d'une sorte de mathématiques nouvelles. Pour Bachelard, « il faudra attacher un tout autre poids à ces mathématiques élargies ».[4] En effet, ces nouvelles mathématiques jouent sur deux termes opposés qui selon Bachelard « vont par exemple du non-euclidien… à l'arithmétique aux opérations non-commutatives qu'on pourrait définir comme non- pythagoricienne, au non-cartésianisme »[5]. Ainsi, indépendamment même des connaissances mathématiques, Bachelard trouve là, une occasion de renouvellement presque inépuisable pour l'esprit mathématique. Le "non" qui précède ces nouvelles mathématiques est « comme bordé par une aire de rénovation »[6] et non de rejet systématique de la théorie mathématique antérieure. Au fond, ces fautes sont bien connues, et les plus grands mathématiciens tels qu'Euclide, Riemann ou Lebesgue en ont commises. En général, les vues intuitives de l'objet mathématique considéré sont responsables de ces erreurs lorsqu'elles conduisent le mathématicien à introduire des propositions fondées sur la seule intuition. Au lieu d'exiger des axiomes qu'ils soient évidents et traduisent immédiatement les propriétés d'objets préexistants, on les considère seulement comme des assertions dont seules les conséquences

[4] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, P.U.F, 2003, P.11.
[5] Ibidem
[6] Ibidem.

présentent un intérêt. La vérité est celle des démonstrations qui satisfont aux axiomes et, partant, toutes les propriétés qui en dérivent.[7]

Considérons, à titre d'exemple, les cinq postulats d'Euclide dans leur version simplifiée.

Postulat 1 : par deux points A et B distincts, ne peut passer qu'une droite unique.

Postulat 2 : tout segment AB d'une droite peut être prolongé par un segment BE congruent à un segment CD donné.

Postulat 3 : par deux points distincts O et A, il y a un cercle ayant comme centre O et comme rayon OA.

Postulat 4 : tous les angles droits sont congruents entre eux.

Postulat 5 : par un point on ne peut faire qu'une parallèle à une droite donnée.

Supposons que nous voulons démontrer à présent quelques propositions comme conséquences logiques de ces postulats. De toute évidence, il n'est pas permis de concevoir que par deux points distincts passent deux droites distinctes. Ce ne sont pas des droites de notre géométrie. Nous pourrions penser en revanche que le postulat 1 contient implicitement la notion de distance. En supposant cela, nous voyons clairement ce que le postulat suggère. " La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre". Mais ne s'agit-il pas plutôt là de rajouter quelques images qui ne sont points contenues dans ce postulat ? Est-ce que ces postulats nous permettent d'introduire véritablement de telles propriétés ? Si cela est vrai, comment expliquerons-nous que d'un autre point de vue, ces propriétés puissent être considérées comme contradictoires ? La réponse, c'est à nous de la fournir. C'est à partir de ces questions précises que, selon Bachelard les « mathématiciens, se sont demandés en effet ce qui adviendrait si l'on abandonnait ou si l'on modifiait la notion de parallèle »[8], contenue dans le postulat 5.

[7] En mathématiques, le support de la notion de vérité s'est déplacé des propositions vers les implications : de nos jours, ce qui suscite le consensus des mathématiciens, c'est la vérité des implications, plus que la vérité des propositions qu'elles relient.

[8] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, P.U.F, 2003, P.25.

Par ailleurs, rien ne nous empêche de dire que ces postulats ne garantissent aucunement l'existence des points sur ou extérieur à une droite ni même la vérité. Peut être cette remarque peut paraitre absurde et on répliquera qu'une droite ne serait pas telle, si elle n'avait pas de points. On a donc raison de penser que l'on comprend la notion de droite bien au-delà de ce que nous sommes à présent en mesure d'admettre. En somme, je serais en train de transgresser la condition d'existence de ces postulats et par là même la signification des postulats. Il reste cependant une question. Est-il sensé de dire, dans le cadre de la géométrie plane-euclidienne, que dans toute droite il y a des points ? Dans un certain sens, la réponse est affirmative. Nous pouvons introduire la proposition soit comme un autre postulat, soit comme une proposition à démontrer, ce qui d'ailleurs semble impossible. Pour Bachelard, « ces simples remarques… toutes premières du non-euclidisme nous permettent déjà de dégager l''idée générale de la nouvelle liberté mathématique »[9]. Alors, la vérité mathématique s'exprime désormais à travers des formes, plus précisément dans les différents systèmes. Aussi, ne faut-il pas reconnaitre qu'avec la vérité mathématique, il n'y a « pas d'échec radical, mais pas de succès définitif »[10]. Bref, comme une dialectique des formes réelles, la vérité mathématique est toujours provisoire.

I. 2. Le réalisme mathématique

Il convient de remarquer que, lorsque Bachelard parle de réalisme mathématique, il ne faut surtout pas penser qu'il remplace le réel concret substantiel de la philosophie réaliste[11] par une structure mathématique, ce qui ferait de lui un nouveau Pythagore[12] qui retracerait l'histoire des mathématiques comme les époques antérieures. Le concept de réalité n'est pas univoque chez Bachelard. Il n'y a pas un réel qui serait l'autre de la pensée, c'est-à-dire un

[9]Ibid, P.26.

[10] Bachelard (Gaston), *Le Rationalisme appliqué*, Paris, PUF, 2004, P.47.

[11] Dans l'ordre de la connaissance, la philosophie réaliste s'oppose à l'idéalisme. La philosophie réaliste est une conception selon laquelle le monde, les choses et les êtres qu'il contient, ont une existence propre indépendante de la connaissance que nous sommes susceptibles d'en prendre. Les choses et les êtres ont une réalité qui nous résiste, qui ne dépend pas de notre prise de conscience. En somme, l'être est autre chose que la pensée.

[12] La géométrie de Pythagore nous a laissé le pouvoir de remplacer les choses par les nombres. Pour lui, un théorème n'est que la description du réel. Rappelons à juste titre le fameux théorème de Pythagore : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

réel qui existe en soi en dehors de la connaissance qu'on pourrait prendre. Ce qui intéresse Bachelard dans l'épistémologie contemporaine, c'est le réel du savant, non pas comme une définition de la réalité, mais comme un critère qui donne le droit d'utiliser ce terme en toute rigueur. C'est en ce sens que

> si l'on condamne trop le réalisme mathématique, c'est qu'on est séduit par la magnifique extension de l'épistémologie formelle, c'est-à-dire par une sorte de fonctionnement à vide des notions mathématiques. Mais si l'on ne fait pas indûment abstraction de la psychologie du mathématicien, on ne tarde pas à s'apercevoir qu'il y a dans l'activité mathématique plus qu'une organisation formelle de schèmes et que toute idée pure est doublée d'une application psychologique, d'un exemple qui fait office de réalité.[13]

En effet, il s'agit d'un réalisme de seconde position[14], d'un réalisme en réaction contre la réalité usuelle. Cela sous entend que les mathématiques englobent toutes les productions (formelles et réelles), c'est une structure en extension, un cadre général de transformation à partir duquel on va pouvoir construire les objets mathématiques spécifiques dont ceux qui servent à décrire le réel au sens philosophique du terme, c'est-à-dire ce qui nous est donné comme objet d'intuition (espace par exemple).

Dès cet instant, si l'on veut méditer le travail du mathématicien,

> on s'aperçoit qu'il provient toujours d'une extension d'une connaissance prise sur le réel et que, dans les mathématiques mêmes, la réalité se manifeste en sa fonction essentielle : faire penser. Sous une forme plus ou moins nette, dans des fonctions plus ou moins mêlées, un réalisme mathématique vient tôt ou tard corser la pensée, lui donner la permanence psychologique, dédoubler enfin l'activité spirituelle en faisant apparaître, là comme partout, le dualisme du subjectif et de l'objectif[15].

Dans l'épistémologie bachelardienne, il est inconcevable d'admettre une raison sans effort conjugué avec l'expérience. C'est cet effort qui permet d'asseoir une science véritable. Il y a en effet un échange entre « les valeurs du rationalisme et de l'expérimentalisme »[16]. Ainsi, l'épistémologie nouvelle devra pratiquer la philosophie dialoguée, c'est-à-dire une

---

[13] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, PUF, 2003, P.8.

[14] D'un point de vue épistémologique, la réalité des objets sur lesquels la science réfléchit n'est accessible qu'à travers une construction théorique et technique du phénomène. Ce réalisme critique, appelé réalisme mathématique, s'oppose au réalisme naïf.

[15] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, PUF, 2003, P.8-9.

[16] Ibid. P.4.

double confrontation entre le réalisme et le rationalisme. C’est alors seulement que les formes rationnelles de la connaissance sont dégagées et qu’on peut enseigner mathématiquement toutes les connaissances véritablement scientifiques. À vrai dire, les mathématiques partent du principe ayant un degré de contenu intuitif donné qui fait que les mathématiques ont cette efficacité dans la cohérence et dans la construction de leur objet. Il faut dès lors affirmer que le problème du rationalisme appliqué se constate alors au niveau des mathématiques que l’on a cru abstraire de la réalité physique. Pour Bachelard, la rigueur intelligible des mathématiques ne doit plus rester dans les profondeurs d’une pensée théorique ayant une appréciation formelle de la réalité comme dans l’épistémologie antique, classique et moderne des mathématiques, mais plutôt, prenant acte ou du moins qui participe à l’organisation active des sciences. Dans ce cas, on ne peut nier le caractère expérimental ou pratique de l’objet mathématique. Ainsi donc, « une axiomatique est un robot mathématique, mais il faut savoir rendre cette axiomatique opérante, il faut qu’une intelligence claire fasse marcher cet appareil de clarté »[17]. Alors que l’objet en soi est un noumène par exclusion des valeurs phénoménales, il nous semble bien que l’objet mathématique dont parle Bachelard, dans son épistémologie, est fait d’une contexture nouménale propre à indiquer les axes du réalisme. C’est en vertu de ce paradoxe que la géométrie suppose un espace réel. N’est-ce pas là le paradoxe de la raison géométrique ?

II. La raison géométrique

La philosophie géométrique dans l’épistémologie de Bachelard peut être définie comme étant l’ensemble des thèses sur la nature de la raison et de l’espace que va produire une pratique de la géométrie. Il considère la philosophie géométrique comme le type même d’une philosophie scientifique pour plusieurs raisons. D’une part son ancienneté ; d’autre part parce que c’est à l’intérieur de la géométrie que s’est opérée la première révolution typique du nouvel esprit scientifique au milieu du XIX[e] siècle. Pour l’épistémologie, la mathématique, c’est d’une part la géométrie et d’autre part les nombres. Le nombre lui-même renvoie à la figure géométrique puisqu’il est souvent saisi à travers la mesure de l’espace. La géométrie semble donc constituer l’essentiel des mathématiques dans la révolution bachelardienne. De

[17] Ibid. P.102.

fait, l'ouverture de la géométrie est avant tout pour lui un exemple de dialectique. Toute l'histoire de la géométrie jusqu'au XIXe siècle repose sur une confusion de l'espace axiomatique et de l'espace réel[18]. Aussi, cette correspondance faisait-elle de la géométrie une forme achevée de la connaissance. Dans la révolution bachelardienne des mathématiques, au lieu d'une confusion il faut parler de fusion. L'intérêt d'une telle fusion, c'est le passage du voir au calculer. On enchevêtre la perception et la conception. La géométrie est l'ébauche de la dimension universelle qui devra unir la perception, l'entendement et l'imagination en une juste proportion. C'est ce que Bachelard pose à travers la question suivante ? Quelle valeur accordée à la bipolarité du réel à travers le groupe et la synthèse.

II.1. La question du réel : le groupe et la synthèse

Avant toute analyse, il faut souligner que le groupe et la synthèse ne constituent pas deux langages ou deux images, pas davantage deux réalités spatiales comme on voulait nous le faire croire dans l'épistémologie antique, classique et moderne des mathématiques. Ce sont plutôt deux plans de pensée abstraite. Deux systèmes différents de rationalité, deux méthodes de recherche. Pour Bachelard, la valeur de la mathématique se trouve dans le groupe et dans la synthèse. La synthèse et le groupe permettent de penser et de coordonner une expérience. Ainsi, « comme cette idée de groupe fait peu à peu son apparition dans la mécanique et dans la physique, nous serons amenés à examiner, d'un point de vue très synthétique, la cohérence expérimentale et théorique de la pensée géométrique »[19]. Le groupe définit les conditions formelles de diverses transformations qui vont s'appliquer à l'ensemble des objets posés par une axiomatique. Au fond, qu'est-ce que le groupe ? C'est un ensemble muni d'une loi de composition associative possédant un élément neutre tel que chaque élément possède une symétrie. C'est donc une structure formelle définissant un ensemble de transformations.

Sans entrer dans les détails d'une interprétation algébrique de la géométrie, contentons-nous de remarquer que le groupe définit à quelle condition formelle une équation géométrique est possible. La synthèse est l'utilisation de ces différentes transformations pour construire un modèle mathématique qui sert à décrire le réel dans sa construction pour qu'il

---

[18] La géométrie classique suppose un espace réel qui se construit avec une règle et un compas. Tout l'espace physique semble se ramener à la géométrie.

[19] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, P.U.F, 2003, P.24.

reste une unité de la science. Cette unité réside, pour Bachelard, dans la structure du groupe. Les mathématiques sont donc l'unité de la physique, c'est-à-dire l'unité du réel. Cet examen pose le problème de la dissolution du réel dans la géométrie. Dans les diverses géométries[20], l'approche du réel diffère d'un mathématicien à un autre. L'avantage de la géométrie euclidienne, c'est qu'elle donne accès à un réel pensé comme totalité. Selon Olivier Roy, commentateur de Gaston Bachelard, « tout l'espace, toutes les perceptions trouvaient leur cohérence dans la géométrie euclidienne »[21]. Qu'en est-il du réel dans ce pluralisme géométrique ? Le premier chapitre du *Nouvel esprit scientifique* de Bachelard traite de la géométrie, c'est-à-dire d'un modèle mathématique qui dessine à l'avance le monde physicien. La pensée bachelardienne des mathématiques fait corps avec la physique. Le monde du physicien est d'abord un monde pensé et construit comme la géométrie. Ce qui est à construire, c'est le réel. Or le réel n'est pas une catégorie extérieure qui viendrait confirmer ou non le corps des hypothèses dans la mesure où celui-ci tire sa cohérence d'un modèle mathématique. C'est donc dans une cohérence externe entre les théories qu'il faut chercher le réel. Pour Bachelard, « c'est par ce jeu que l'esprit peut mesurer son emprise sur la réalité mathématique »[22]. Dans ce jeu, deux critères vont apparaître : le premier c'est la cohérence évoquée plus haut, le second l'opérativité de la théorie, c'est-à-dire un fait que le réel appelle d'autres relations, d'autres compléments. Il y a une sorte d'auto-production, d'auto-fonctionnement d'un modèle mathématique qui semble ici indépendant de la pensée consciente du mathématicien et d'une référence à un réel extérieur.

Or, pour Bachelard, c'est cet auto-fonctionnement qui autorise à parler de la réalité du modèle mathématique. Voyons ici comment il approche la question du réel. Pour lui, « la pensée mathématique prend son essor avec l'apparition des idées de transformation, de correspondance d'applications variées »[23]. Le réel n'est pas donné, il n'est plus une chose, c'est plutôt un concept. Bien entendu, il faut rappeler que lorsqu'il s'agit du réel ou du réalisme mathématique, Bachelard change de position. En effet, son point de vue de départ

[20] Nous faisons ici allusion à la géométrie de Nicolaï Inanovitch Lobatchevski et de Bernhard Riemann. Pour Lobatchevski, par un point pris hors d'une droite, il peut passer plusieurs parallèles. Quant à Riemann, par un point pris hors d'une droite, dans le même plan, il ne peut passer aucune parallèle.

[21] Roy (Olivier), *Le Nouvel esprit scientifique de Bachelard*, Paris, Éditions Pédagogie moderne, 1979, P. 31.

[22] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, PUF, 2003, P.28.

[23] Ibidem.

était que le réel est une conviction et non un concept scientifique. Si dans les mathématiques Bachelard refuse cette conception du réel, c'est parce qu'il considère le réel mathématique comme, le dit Roy, « un ensemble de relations cohérent et opératoire »[24]. Ce qui est essentiel ou du moins intéressant, c'est que sans changer de façon fondamentale l'essentiel de ses thèses sur les mathématiques, Bachelard donne un axe fondamental de sa pensée, concernant sa conception du réel. Si Bachelard refuse une métaphysique du réel (existence en soi d'objet en dehors de ma pensée), c'est aussi d'une part parce que cette définition peut jouer un rôle négatif et constitué un obstacle épistémologique dans le développement de la pensée scientifique en général, et de la pensée des mathématiques en particulier. D'autre part, Bachelard soutient dans *Le nouvel esprit scientifique* que le réel est une conviction psychologique. Mais ce qu'il faut aussi noter, c'est que Bachelard ne rejette pas l'effet du réel produit par les mathématiques.

Au fond, on ne peut faire l'économie de l'instant psychologique du réel comme en témoigne cette pensée de Bachelard : « Si l'on ne fait pas indûment abstraction de la psychologie du mathématicien, on ne tarde pas à s'apercevoir qu'il y a dans l'activité des mathématiques plus qu'une organisation formelle de schèmes et que toute idée pure est doublée d'une application psychologique, d'un exemple qui fait office de réalité »[25]. Il est donc nécessaire que notre pensée se double d'un réel, au lieu de situer ce réel dans un univers métaphysique. Pour que cet effet ne soit pas une simple illusion, il faut renoncer à poser le sujet psychologique comme extérieur (c'est-à-dire étant lui-même objet) et aussi refuser de considérer la raison comme immuable. Bachelard polémique donc sur deux plans comme le dit Roy *« au formaliste il dit qu'on ne fera jamais l'économie du sujet, donc de la question du réel ; au rationaliste il dit que la raison n'est pas une substance intemporelle et immuable, mais qu'elle se modifie par ses objets. Finalement, c'est peut être là qu'il faut situer cet effet de réel : la modification de la pensée par ses propres objets »*[26]. Il n'y a pas de coupure chez Bachelard entre le monde de la science et celui de la psychologie. C'est pourquoi toute la pensée des mathématiques revient à construire la synthèse entre la science et le savant. Il y a

[24] Roy (Olivier), *Le Nouvel esprit scientifique de Bachelard*, Paris, Éditions Pédagogie moderne, 1979, P.34.
[25] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, P.U.F, 2003, P.8.
[26] Ibid., P.35.

donc chez Bachelard deux effets de réel des mathématiques : l'un de l'ordre psychologique[27], l'autre de l'ordre expérimental[28]. La synthèse se réalise dans un dualisme image/modèle mathématique, c'est ce dernier qui se lit dans la géométrie euclidienne et non-euclidienne.

II.2. Le Champ géométrique : un espace non homogène

Nous n'entreprendrons pas ici une histoire détaillée des théories géométriques. Nous notons seulement que pour les savants de la fin du XVIII^e^ siècle et du début du XIX^e^ siècle dans les mathématiques, on ne peut isoler un certain nombre de difficultés. En effet, plusieurs difficultés surgirent rapidement où se trouvaient déjà mis en cause un certain nombre de théories, ainsi que les principes sur lesquels ces théories étaient fondées. Un examen attentif de ces difficultés allait remettre en cause la vision euclidienne de la géométrie telle qu'exposée dans son œuvre les *éléments.* Nous voudrions énumérer quelques unes de ces difficultés pour montrer d'une part que l'espace géométrique n'est pas homogène et d'autre part voir à quelles nouvelles conceptions elles conduisent.

Les physiques galiléenne et newtonienne exprimées par la géométrie euclidienne font, implicitement le plus souvent, explicitement parfois le postulat que l'univers est régi par un ordre que la géométrie euclidienne décrit. Le désordre n'est qu'une apparence que l'on doit peu à peu résorber. Peu importe, l'ordre est là, saisissable par des formulations géométriques. D'un autre coté, les lois de l'attraction permettent de traduire en équation les trajets des astres. Il est toujours possible de décrire dans le système euclidien un système d'axes en mouvement les uns par rapport aux autres en un système d'équation. Le système que l'on obtient est aisément résolu lorsqu'on considère deux astres. Mais si l'on veut prendre en compte plus de deux astres, on n'aboutit à des difficultés, c'est-à-dire que l'on ne peut que donner une solution approximative. Ces limites à la méthode n'ont longtemps occasionné que peu de troubles. Si la rigueur géométrique se trouvait prise à défaut, il n'y avait pas une véritable difficulté. Dans la géométrie euclidienne, l'espace a toujours eu une dimension correspondant

[27] L'ordre psychologique c'est l'effet de l'axiomatique dans le psychisme du savant.

[28] L'ordre expérimental c'est la production d'un objet dans l'expérience.

au nombre entier. Pour les figures traditionnelles de la géométrie euclidienne (le triangle, le rectangle, le cercle, …) la notion de dimension est tout à fait intuitive. Mettons donc en lumière ce qu'il y a de décisif comme le dit Bachelard *« dans la révolution non-euclidienne »*[29].

Il faut l'affirmer tout net que pour Bachelard, dans *l'Engagement rationaliste*, les autres géométries étendent la puissance de la géométrie euclidienne dans l'explication et la transformation du monde. Dans ce dédoublement de la raison géométrique, gît une question philosophique importante qui se trouve, de ce fait, renouvelée : la question de la nature et de l'espace. En fait, ce n'est pas d'un dédoublement de la raison qu'il faut parler, mais d'un véritable éclatement de la géométrie euclidienne, car les travaux de Benoît Mandelbrot[30] ont été précédés par l'apparition des géométries non-euclidiennes, remettant en cause le postulat des parallèles par la théorie de la relativité d'Einstein[31] et les développements de la topologie et jusqu'à la théorie des catastrophes[32] de René Thom[33]. Ces travaux « comparés aux recherches et aux constructions de Lobatchevski et Bolyai se présentent dans une dialectique plus franche, car la chaîne des théorèmes qui découlent du non-euclidisme[34] de l'axiome des

---

[29] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, P.U.F, 2003, P.28.

[30] Benoît Mandelbrot est un mathématicien franco-américain, né à Varsovie le 20 novembre 1924 et mort le 14 octobre 2010 à Cambridge, dans le Massachusetts. Il a travaillé, au début de sa carrière, sur des applications originales de la théorie de l'information, puis développé une nouvelle classe d'objets mathématiques : les objets fractals, ou fractales.

[31] La théorie de la relativité stipule qu'il n'y a pas de méthode absolue dans la connaissance du phénomène, pour chaque système, il faut formuler des lois correspondant, à un espace, à un temps et une méthode de travail.

[32] Fondée par René Thom, la *Théorie des catastrophes* est un domaine de la topologie différentielle. Elle a pour but de construire le modèle dynamique continu le plus simple pouvant engendrer une morphologie, donnée empiriquement, ou un ensemble de phénomènes discontinus. Plus précisément, il s'agit d'étudier qualitativement comment les solutions d'équations dépendent du nombre de paramètres qu'elles contiennent. Le terme de « catastrophe » désigne le lieu où une fonction change brusquement de forme. Il est aussi l'auteur de La *topologie différentielle* qui est une branche des mathématiques et qui étudie les fonctions différentiables définies sur des variétés différentielles, ainsi que les applications différentiables entre variétés différentielles.

[33] René Thom, né à Montbéliard le 2 septembre 1923 et mort à Bures-sur-Yvette le 25 octobre 2002, est un mathématicien français, fondateur de la théorie des catastrophes. Il reçut la médaille Fields en 1958.

[34] La géométrie euclidienne fera autorité jusqu'à la fin du XVII[ème] siècle. Mais à partir de cette période, des doutes innombrables naissent quant à l'évidence du 5[ème] postulat. Que les parallèles existent, ce n'est pas cela qui pose problème. Ce n'est que plus tard au XIX[ème] siècle que les mathématiciens touchent l'élément fondamental du doute, notamment avec les penseurs comme Lobatchevski, Janus Bolyai et Riemann. Ils vont se demander ce qu'il adviendrait si l'on abandonnait ou si l'on modifiait la notion de parallèle. Lobatchevski, en 1834, suppose que par un point situé hors d'une droite on peut mener une infinité de droites non sécantes à cette

parallèles s'étend de plus en plus et se libère des analogies »[35]. Au fond, quelle est l'origine du non-euclidisme ? Écoutons Bachelard à cet effet :

> puisqu'on n'arrive pas à démontrer directement la proposition d'Euclide, prenons là comme une vérité à établir par l'absurde. Remplaçons donc cette proposition par la proposition contraire. Tirons des conclusions du tableau de postulats ainsi modifié. Ces conclusions ne peuvent manquer d'être contradictoires. Dès lors, puisque le raisonnement est bon, c'est la proposition prise comme base qui est fautive. Il faut donc bien rétablir la proposition d'Euclide qui est ainsi validée[36].

L'existence de géométries non-euclidiennes a fait perdre aux axiomes de la géométrie leur caractère nécessaire et universel. La seule qualité que l'on était en droit d'exiger d'eux était la cohérence. Dès lors, on ne pouvait plus les considérer comme des jugements synthétiques a priori puisque selon Emmanuel Kant, le synthétique a priori est caractérisé par l'universalité et la nécessité et reste indépendant de toute expérience. Donc la question de l'adéquation de la géométrie au monde physique, le fondement de cette possibilité de définir l'univers des choses (ou pour le moins des phénomènes) dans le langage mathématique de la géométrie euclidienne algébrisée, question que Kant résolvait en faisant de l'espace et du temps les cadres ou formes a priori de notre sensibilité, cette question doit être reformulée. Ce que suggère par ailleurs, la relativité généralisée, c'est que le cosmos est descriptible, non pas par une géométrie euclidienne, mais par une géométrie courbe. La courbure de l'espace est une question physique qui appelle une géométrie non-euclidienne dès lors que l'on se place dans un espace suffisamment grand. La géométrie euclidienne reste correcte pour un univers à notre taille. Pour Bachelard, « il n'y a point de faiblesse à l'intérieur de la géométrie euclidienne, il y a seulement un manque de rigueur dans son maniement ; on a finalement voulu nier son caractère axiomatique en en faisant une réalité, que ce soit la réalité de nos

---

droite. De cette hypothèse non-euclidienne, il déduit une série de théorèmes entre lesquels il est impossible de relever aucune contradiction et il construit une géométrie dont l'impeccable logique ne le cède en rien à celle de la géométrie euclidienne. Dans cette géométrie, l'espace est représenté par une courbure négative. Riemann, en 1854, à son tour postule un monde où les êtres sont tous sphériques et sans épaisseur habitant sans possibilité de sortie et donc de contact avec d'autres mondes sur une même sphère. Quelle géométrie peut-on y édifier? Une géométrie sphérique étendue à trois dimensions. Pour la construire le mathématicien allemand a dû jeter par-dessus bord non seulement le postulat d'Euclide mais encore le premier axiome : par deux points on ne peut faire passer qu'une droite. Pour Riemann, par un point situé hors d'une droite on ne peut faire passer aucune parallèle à cette droite. Dans cette géométrie l'espace est représenté par une courbure positive.

[35] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, P.U.F, 2003, P.8.

[36] Ibid. P.29.

structures mentales ou la réalité de la nature »[37]. De même que les lois de Newton sont une bonne approximation pour des objets se mouvant à des vitesses très faibles à celle de la lumière, de même la géométrie euclidienne reste efficace à une échelle restreinte. Bachelard peut donc conclure : « la multiplicité des géométries contribue en quelque sorte à déconcrétiser chacune d'elles »[38]. Lobatchevski a créé l'humour géométrique en appliquant l'esprit de finesse[39] à l'esprit géométrique[40]. Il a fondé l'application du principe de contradiction. C'est de cette application mathématique que l'on construit les théories pour une mobilité essentielle de la raison.

III. Mathématique et théorie scientifique

L'activité scientifique la plus élémentaire consiste en une formulation des théories en formules mathématiques, c'est-à-dire que dans la révolution bachelardienne des mathématiques aucun objet ne peut se définir que dans sa structure mathématique. Ce qui est une révolution par rapport à l'épistémologie antique, classique et moderne des mathématiques. En effet, dans l'ancienne épistémologie, l'épistémologie se préoccupait peu de la structure mathématique du réel. Or, aujourd'hui il est possible de représenter chaque phrase du discours mathématique par une formule mathématique. Cette représentation exige de la part de la théorie mathématique des symboles. Ces symboles ne peuvent être développés de manière tant soit peu rigoureuse qu'en étant plongés dans une théorie mathématique. Il semble impératif de prévoir des formules mathématiques pour définir la déduction. La mathématique n'est d'ailleurs pas d'une autre nature que les théories. C'est grâce aux théories qu'il y a construction de l'expérience à partir d'un modèle mathématique qui, selon Roy, « préexiste à l'intérieur du phénomène toujours par l'intermédiaire d'une théorie »[41]. De ce qui précède, si l'on juge du phénomène d'après son objectivité, on peut dire, selon Bachelard, que « l'objet se mathématise et qu'il manifeste un singulier rapprochement de la preuve expérimentale et de la preuve mathématique »[42]. La réalité se transforme d'abord en réalisme

[37] Ibid. P.101.
[38] Ibid., P.31.
[39] L'esprit de finesse consiste à avoir la vue bien nette pour voir tous les principes et ensuite l'esprit juste pour ne pas raisonner faussement sur des principes connus.
[40] L'esprit géométrique, ce sont les principes palpables, mais éloignés de l'usage commun.
[41] Roy (Olivier), *Le Nouvel esprit scientifique de Bachelard*, Paris, Éditions Pédagogie moderne, 1979, P. 42.
[42] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, P.U.F, 2003, P.86.

mathématique, puis le réalisme mathématique vient se dissoudre dans une sorte de réalisme de probabilité. Exprimons cette double fonction des mathématiques en langage mathématique et en construction mathématiques dans la révolution bachelardienne des mathématiques.

III.1. Les mathématiques comme langage naturel

Les mathématiques, en s'intéressant à la genèse des concepts scientifiques d'aujourd'hui, apportent un langage nouveau à ces sciences. En accordant un intérêt au langage mathématique d'aujourd'hui, le philosophe apporte au mathématicien l'éclairage historique indispensable à une bonne compréhension des grands courants de la pensée mathématique contemporaine. Aussi, réfléchir sur le langage mathématique tel qu'il est employé par les grands mathématiciens eux-mêmes dans leurs recherches, leurs publications ou leurs enseignements, nous semble indispensable. Cette réflexion d'autant plus urgente que le formalisme des mathématiques actuelles donne trop souvent l'illusion de se suffire à lui-même. Étant avant tout un langage écrit, le langage mathématique n'est pas sans comporter certains inconvénients majeurs qui ont des conséquences considérables pour son bon usage. L'écriture, certes, rend visible l'impensable, mais fixe définitivement certains aspects du concept. Les concepts mathématiques sont des notions en perpétuel devenir. C'est dire combien le langage mathématique, même axiomatisé, doit être flexible et souple tout comme la langue naturelle. Selon Bachelard, « une langue mathématique fondamentale univoque est impossible »[43]. La nécessité de travailler avec souplesse, en utilisant plusieurs formules pour une même idée, vise l'unification du phénomène.

Le langage mathématique vise la totalité. Dès lors, une réévaluation de ce langage s'impose avec Bachelard : « la mathématique est une pensée sûre de son langage »[44]. La singularité du langage mathématique dans son rapport au phénomène est très difficile à saisir pour les penseurs qui font des mathématiques un langage formel. Les tenants de ce concept sont en effet contraints de penser le langage comme universel. Et pourtant, cela devrait aller de soi, de façon naturelle, le langage mathématique s'applique à toutes les sciences. Il est un langage universel. Ce point de vue oblige le langage mathématique à expliquer à un degré plus poussé la mathématisation du phénomène. Ce langage serait par exemple un meilleur

[43] Ibid., P.46.

[44] Bachelard (Gaston), *Activité rationaliste de la physique contemporaine*, Paris, P.U.F, 1951, P.29.

contrôle des conditions d'expérimentation qui rendraient compte de la possibilité de mesurer quantitativement toutes grandeurs philosophiquement parlant. C'est un effort que fait le langage mathématique pour cerner le réel. Pour Bachelard, c'est le premier effort du langage mathématique pour « marquer son passage du réalisme matérialiste au réalisme mathématique, car on sent plus le besoin plus ou moins net de tout fonder par le langage naturel des mathématiques »[45].

Cette réflexion sur le langage mathématique nous conduit à établir des rapports entre linguistique et mathématique. En tant que discipline constituée, la linguistique est une science à base empirique qui traite des systèmes symboliques signifiant, détachable d'une réalité concrète vécue. Si la linguistique repose sur un empirique, c'est qu'elle a des bases observationnelles. L'observation en linguistique, comme dans toute discipline à base observationnelle ou empirique s'apprend, se prépare et se contrôle. L'illusion d'être de plain-pied avec notre langage peut faire croire qu'en linguistique l'observation est immédiate. Or, il n'en est rien. Chaque reconstruction est une hypothèse qu'il faut vérifier par une validation appropriée en imaginant des protocoles expérimentaux susceptibles de mieux dominer la richesse et la complexité des langues. C'est ce que Bachelard appelle « le subtile passage du plan réaliste au plan de la mathématique probabilitaire »[46]. Parler de linguistique et de mathématique ou plutôt de rapport entre mathématique et linguistique, revient à parler d'un ensemble fini de règles qui caractérisent exactement ces deux disciplines. De même qu'on utilise un ensemble d'hypothèses en mathématique, on utilise aussi un ensemble de règles grammaticales appelé symboles linguistiques pour établir ou démontrer un ensemble de suite de part et d'autre. Le recours aux mathématiques est nécessaire pour formuler, de façon opératoire, les concepts reliés entre eux dans un système dont on vérifie la cohérence. Certes, il y a toujours un arrière plan philosophique qui peut être parfois avoué. Cependant, cet arrière plan philosophique peut réduire la mathématisation avec une construction formelle. La mathématisation de la linguistique doit dépasser la seule entreprise de formalisation pour se constituer en un système de construction.

III.2. Mathématique constructive

[45] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, P.U.F, 2003, P.82.
[46] Ibidem.

Comme toute science, la mathématique traite d’une réalité indépendante de chaque mathématicien particulier. La géométrie étudie des droites et des cercles idéaux, non des traits et des ronds dessinés. Dans cette perspective, pour combattre les mathématiques, on les accuse de se présenter comme une entreprise formelle et idéelle. Selon cette caricature, le manque d’impact des mathématiques sur la réalité par faute de conception constructive, détruirait une grande part les mathématiques. Mais ne dit-on pas que, "qui veut noyer son chien l’accuse de rage" ? Pour combattre ces arguments sus développés, nous allons montrer avec la révolution bachelardienne des mathématiques que les mathématiques sont une construction du phénomène, de la réalité ou de l’expérience comme en témoigne cette pensée de Bachelard : « désormais l’étude du phénomène relève d’une activité purement nouménale ; c’est la mathématique qui ouvre les voies nouvelles à l’expérience »[47].

Selon la conception constructive des mathématiques, il n’y a pas de mathématiques sans mathématiciens. Même s’il extrapole la réalité, le mathématicien constructif refuse des constructions fantastiques, il ne se croit pas éternel dans la mesure où l’activité mathématique a un commencement. C’est ce que tente de montrer le mathématicien Roger Apéry : « la mathématique se déroule dans le temps avec un raisonnement qui est une méthode pour que si certaines affirmations sont supposées vraies avant, d’autres deviennent vraies après la construction »[48]. Cette part constructive se manifeste dans la création, dans l’apprentissage, dans la reproduction. Pour Bachelard, il faut donc accepter de « penser tout le réel dans son organisation mathématique »[49].

Le mathématicien constructif reconnait une certaine réalité aux objets mathématiques. Mais refuse le tabou philosophique interdisant de parler toujours de liberté, car toutes activités exigent un esprit libre opérant dans le temps. De même, un raisonnement mathématique, essentiellement fragile, doit être refait pour être compris. Un texte mathématique se lit plume à la main, bien que la durée semble moins contraignante. L’examen d’un raisonnement mathématique exige d’embrasser simultanément, à chaque étape, les prémisses, la conclusion, la règle de raisonnement utilisé. Une compréhension authentique s’adresse à l’ensemble des

---

[47] Ibid., P..62.
[48] Apéry (Roger), *Penser les mathématiques*, Paris, Éditions du Seuil, 1982, P.39.
[49] Bachelard (Gaston), *Le nouvel esprit scientifique*, Paris, P.U.F, 2003, P.86.

articulations du raisonnement, de façon que le résultat apparaisse dû à une méthode applicable à d'autres problèmes et non à un heureux hasard. Schématiquement, l'activité mathématique de construction comporte deux phases caractérisées par cette boutade : 5% d'inspiration et 95% de transpiration. Dans la première phase, l'activité est mentale, subjective, indépendante du langage, étroitement liée à la durée intuitive. Dans la seconde phase, le mathématicien note, formalise, traduit son intuition en termes communicables où chacun peut examiner ses résultats devenus objectifs.

Conclusion

La révolution bachelardienne des mathématiques que nous venons d'esquisser nous invite à une double méditation ou plutôt à un double enjeu. Tout d'abord, l'éclatement de la rationalité mathématique dont l'exemple le plus visible est l'avènement de la géométrie de Lobatchevski. « Du jour où Lobatchevski a dialectisé la notion de parallèle, il a invité l'esprit humain à compléter dialectiquement les notions fondamentales. Une mobilité essentielle, une effervescence psychique, une joie spirituelle se sont trouvées associées à l'activité de la raison »[50]. Ensuite, concernant le rapport entre les mathématiques et les théories scientifiques, il est nécessaire de cesser dit Bachelard de considérer les mathématique comme un simple langage. Il faut plutôt voir en elles une doctrine constructiviste. C'est la pensée mathématique qui fait penser le physicien dans la construction de sa théorie. D'ailleurs, c'est à ce sujet que « le mathématisme est plus descriptif mais formateur »[51]. Bachelard parle de la mathématisation progressive, dynamique, dominante de l'histoire des sciences. Bien entendu, le concept mathématique pris dans cette perspective de généralisation apparaît comme une aspiration au complet. Il est donc essentiel de penser les mathématiques en termes de dynamique dans son rapport avec le phénomène, le réel, la linguistique. Pour l'instant, il reste à caractériser plus fondamentalement cette relation. Au fond, il n'y a pas qu'une relation, il y a des relations à chaque étape. Pour Bachelard, à chaque étape, l'on pourra répondre "*ça*

[50] Bachelard (Gaston), *L'Engagement rationaliste*, Paris, PUF, 1972, P.7.
[51] Bachelard (Gaston), *Le Nouvel esprit scientifique*, Paris, PUF, 2003, P.83.

dépend"[52]. En effet, cela dépend du choix des axiomes dans la construction de l'hypothèse. La raison, pour finir, selon Bachelard, éclate d'un sourire car elle peut jouer à l'axiomatique.

Bibliographie

Apéry (Roger), *Penser les mathématiques*, Paris, Éditions du Seuil, 1982.

Bachelard (Gaston), *Activité rationaliste de la physique contemporaine*, Paris, PUF, 1951.

Le Nouvel esprit scientifique, Paris, PUF, 2003.

Le Rationalisme appliqué, Paris, PUF, 2004.

L'Engagement rationaliste, Paris, PUF, 1972.

La Formation de l'esprit scientifique, Paris, Vrin, 2000.

Chaintin (Gregori), *Les Dossiers de la recherche, in pouvoir des mathématiques*, Paris, Novembre 2009.

Dieudonné (Jean), *Panorama des mathématiques pures*, Paris, Gauthier-Villars, 1977.

Einstein (Albert), *Comment je vois le monde*, Paris, Flammarion, 1958.

Hardy (Godfrey Harold), *L'Apologie d'un mathématicien*, Paris, Belin, 1985.

Heyting (Albert), *Les Fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration*, Paris, Gauthier-Villars, 1955.

Hilbert (David), *Sur les problèmes futurs des mathématiques – les vingt-trois problèmes,* Paris, Éditions Jacques Gabay, 1990.

Leblond (Jean-Marc Lévy), *La Force des mathématiques* in *Penser les mathématiques*, Paris, Éditions du seuil, 1982.

Le Lionnais (François), *La Beauté des mathématiques in les grands courants de la pensée mathématique,* Paris, Hermann, 1998.

Mandelbrot (Benoît), Richard Hudson, *Une Approche fractale des marchés*, Paris, Éditions Odile Jacob, 2005.

Poincaré (Henri), *La Science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1902.

Pont (Jean-Claude), *La Topologie algébrique des origines à Poincaré*, Paris, PUF, 1974.

[52] Bachelard (Gaston), *L'Engagement rationaliste*, Paris, PUF, 1972, P.7.

Roy (Olivier), *Le Nouvel esprit scientifique de Bachelard*, Paris, Éditions pédagogie moderne, 1979.

Thom (René), *Modèles mathématiques de la morphogenèse (recueil de textes sur la théorie des catastrophes et ses applications)*, Paris, Union générale d'éditions, coll. « 10/18 », n°887, 1974. Nouvelle édition revue et augmentée, Paris, Christian Bourgois, 1981.

Modèles mathématiques de la morphogenèse, Paris, Collection 10/18, Union Générale d'Éditions, 1974.

Pour une théorie de la morphogénèse (chapitre 14, pages 174 à 188) dans *Les Sciences de la forme aujourd'hui*, Paris, Éditions du Seuil, 1994.

Vogel (Théodore), *Physique mathématique classique*, Paris, Armand Colin, 1956.

Wendelin (Werner), *Les Dossiers de la recherche, in pouvoir des mathématiques*, Paris, Novembre 2009.